Físicos y Matemáticos haciendo Finanzas. Introducción a las Finanzas Cuantitativas Parte I

Manuel Maurette

CRISIL GR&A - Risk and Analytics.
Departamento de Matemática, FCEN, UBA.

1ro de Septiembre de 2014

CRISIL A STANDARD & POOR'S COMPANY

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Hoja de ruta Lunes

- Qué es un quant?
- Por qué hay matemáticos y físicos en la industria financiera?
- Breve Introducción a las finanzas cuantitativas
- Derivados financieros
- Valuación de derivados
- Modelo binomial – discreto

Hoja de ruta Miércoles

- Introducción al Cálculo Estocástico
- Modelo de Black-Scholes – continuo
- Simulaciones numéricas
- Donde trabajo y con quien.

QUANT, y eso con qué se come?

QUANT, y eso con qué se come?

Definición

En finanzas, el análisis cuantitativo es la utilización de matemáticas financieras, con frecuencia derivadas de la física y de la estadística, para llevar a cabo análisis financiero. De modo similar, este tipo de análisis tiene lugar en la mayor parte de sectores industriales modernas, si bien en muchas ocasiones este análisis no se conoce en esos sectores como análisis cuantitativo. En la industria de inversión, los analistas que desarrollan análisis cuantitativo son conocidos normalmente como **quants**. - Wikipedia

Los *quants* suelen venir de la Matemática, la Física y la Ingeniería, y no de carreras relacionada con la Economía.

El Análisis Quantitativo es una gran fuente de empleos para Docotores en Física y Matemática. Por qué??? Ya lo veremos.

Donde trabaja un Quant?

En los grandes bancos de Inversión :

- HSBC, Deutsche Bank, BNP Paribas Barclays PLC,
- JPMorgan Chase, Bank of America USA, RBS,
- Citigroup Inc, Wells Fargo, UBS, Credit Suisse Group, Goldman Sachs, Morgan Stanley

Fondos de Inversión (no necesariamente buitres):

- Bridgewater Associates, Man Group, JPMorgan Asset Management
- Brevan Howard Asset Management, Och-Ziff Capital Management Group, Paulson & Co, BlackRock Advisors

También en:

- Instituciones de seguros, Agencias de Rating
- Organismos Estatales de Control, Compañías de desarrollo
- Reclutadores, Consultoras (CRISIL)

Perfiles Quant

- Matemática Pura/Física Teórica - Fondos de inversión *Top*. Los Bancos contratan individuos con un alto nivel en Cálculo Estocástico para la investigación y desarrollo en modelos de derivados. Algunas ramas d ela Física con alto contenido matemático (Cosmología, Teoría de Cuerdas, Quantum Field Theory etc)
- Física Computacional/Mat. Aplicada/Ingeniería - Pueden producir implementaciones computacionales roustas a partir de modelos. Esta tarea es extremadamente util bancos y en fondos, especialmente en el area de desarrollo.
- Estadística/Econometría - Demandados para fondos *técnicos*, como por ejemplo aquellos que manejan Commodities. Modelado de series de tiempo es escencial en estos casos.
- Ciencias de la Computación- Mucho en fondos y bancos: *machine learning*, herramientas de optimización.

Finanzas 101

Definición

Llamaremos **activo**-*asset* a cualquier posesión que pueda producir beneficios económicos.

Ejemplos de activos:

- La acción de Apple que cotiza en NYSE.
- Un Quintal de soja en el mercado de Rosario.
- El futuro de Mayo 2015 de una tonelada de trigo.
- La tasa de cambio EUR/USD.

Definición

Llamaremos **Cartera**-*Portfolio* a un conjunto de activos, que pueden ser acciones, derivados, bonos, etc.

Definición

El Mercado Monetario - **Money Market** es es el conjunto de mercados financieros,en los que se intercambian activos financieros que tienen como denominador común un plazo de amortización corto, que no suele sobrepasar los dieciocho meses, un bajo riesgo y una elevada liquidez. Ejemplo: Bono corto plazo soberano. Pedir dinero prestado *sin* costo/riesgo. Notación: $B(t)$.

Se dice que en una inversión se toma una posición **long** cuando se compra y se dice que se toma una posición **short** cuando se vende.

Ejemplo

Al portfolio compuesto por 100 unidades del activo S long, un bono short y 10 opciones short, lo podemos denotar:

$$\Pi = 100S - B - 10C$$

Valor futuro del dinero y riesgo

Teorema

1$ hoy vale más que 1$ mañana.

$$B(0) = \frac{1}{(1+r)} B(T)$$

o

$$B(0) = e^{-rT} B(T)$$

Teorema

1$ sin riesgo vale más que 1$ con riesgo.

El precio justo! - Arbitraje

Teorema

There is no free lunch!

Definición

En economía y finanzas, arbitraje es la práctica de tomar ventaja de una diferencia de precio entre dos o más mercados: realizar una combinación de transacciones complementarias que capitalizan el desequilibrio de precios.

Para modelar y para buscar *fair prices* necesitaremos la siguiente hipótesis:

No existen posibilidades de arbitraje

Arbitraje

Ejemplo

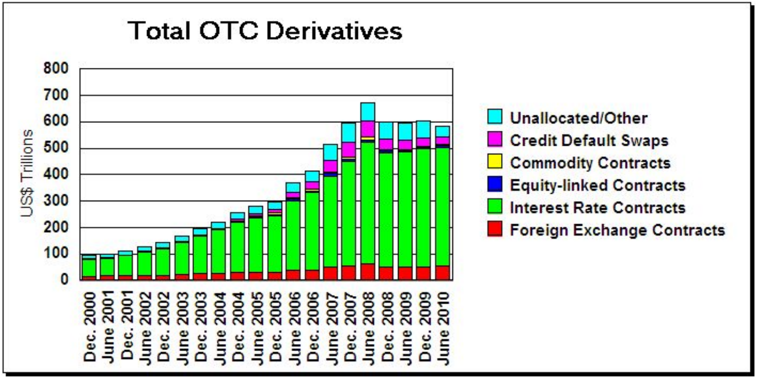
Supongamos que una acción se comercia tanto en NYSE como en el LSE. Supongamos que cotiza 200 USD en NY y 100 GBP en Lon en un momento en el cual la tasa de cambio USD/GBP es de \$2.03 por libra. Un *arbitrador* podría simultaneamente comprar 100 unidades de la acción en NY y venderlas en Lon obteniendo una gannacia neta, libre de riesgo de

$$100 \times [(\$2{,}03 \times 100) - \$200 = \$300$$

si no hubiera costos de transacción.

Estas oportunidades existen en la realidad, pero las ventanas son (deberian ser!) pequeñas.

$$\text{Derivados} \neq \frac{\partial u}{\partial x}$$



Derivados

Definición

Un **derivado financiero** es un instrumento financiero que depende de otro(s) activo(s), llamado **subyacente**.

Hay dos grandes grupos en el mercado que usan los derivados:

- **Replicadores** *Hedgers*: los usan para mitigar riesgo.
- **Especuladores**

Otros grupos son los *arbitradores* y los *market-makers*.
Se usan, entre otras cosas, para *transferir riesgo*.

Algo de Historia

580 a.c. Tales de Mileto compró todas las prensas de olivo en Mileto luego de predecir el tiempo y una buena cosecha en un determinado año. En otra version, Aristóteles explica que Tales reservó prensas con descuento, para luego alquilarlas más caras cuando la demanda era mayor.

1600 d.c. En la burbuja de los Tulipanes en Holanda (1630) se compraban tulipanes a futuro. Los primeros futuros estructurados se encuentran en el mercado de Arrozde Yodoya, en Osaka, Japon (1650). London Royal Exchange.

1907 Se crea el Mercado de Cereales a Termino de Buenos Aires S.A. y en 1991 adopta su denominación actual "Mercado a Termino de Buenos Aires S.A.".

1973 d.c. Se crea la Chicago Board of Option Exchange. (mismo año que la publicación de Black y Scholes).

Derivados Madre

Un **forward** es un acuerdo para comprar o vender un activo en un cierto tiempo futuro por un precio pactado.

Una **opción** es un contrato que le da al dueño el *derecho*, pero no la obligación, de negociar un activo predeterminado, llamado también el *activo subyacente* por un precio determinado en un tiempo en el futuro, llamada la *fecha de expiración*. Una opción *call* da al dueño el derecho a comprar y una *put*, el derecho a vender.

Un **swap** es un acuerdo para intercambiar flujos de fondos futuro. Típicamente una parte se basa en un precio fijo y la otra en un precio variable.

Definición

El payoff de un derivado es su valor a tiempo final.

Forward

En el contrato forward, se cierra un precio K con antelación.

Ejemplo

Supongamos que dentro de 6 meses, una empresa Española tiene que pagar 1M de Libras Esterlinas a una empresa inglesa y quiere cubrirse ante posibles cambios en el EUR/GBP (hoy* en 1.25). Esta puede entrar en un contrato forward con un banco y fijar un precio conveniente para el ratio EUR/GBP. En 6 meses, la empresa entonces tiene la obligacion de comprarle a la entidad financiera, 1M de libras al precio fijado y la entidad financiera tiene la obligación de venderle. La empresa le transfirió el riesgo al banco.

El payoff es:

- $F_L(T) = S(T) - K; \; F_S(T) = K - S(T)$

El precio es:

$$F_L(0) = S(0) - Ke^{-rT}$$

Futuros

Los futuros son de naturaleza similar a los contratos forwards pero estructurados.. Aquí algunas diferencias:

- El Forward se ajusta a las condiciones y necesidades de las partes, ya que no está tan estandarizado.
- El Forward se negocia entre las dos partes que han de ser conocidas, sin cámara de compensación por medio.
- El Futuro se realiza en mercados organizados y los precios se fijan mediante cotizaciones públicas.
- El Futuro lleva generalmente aparejada la exigencia de un depósito en garantía.
- En el Forward no existe una regulación normativa concreta, cosa que sí existe para los contratos de Futuro.

Swap

El swap es el derivado de tasa de interes por exelencia. Se llevan la mayor parte del mercado de derivados.

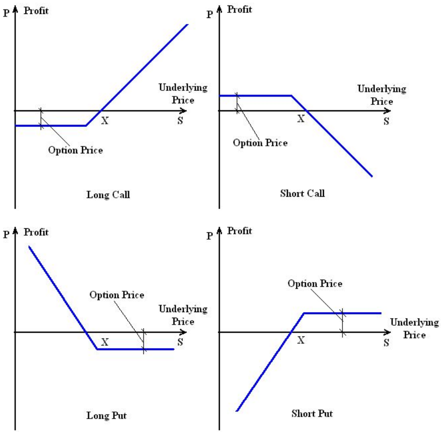
Definición

En un swap (estandard), una parte paga una tasa fija en tiempos fijados de antemano, y la otra paga una tasa flotante en fechas también fijadas de antemano. El ejemplo más estandard es en el cual una parte paga tasa fija cada 6 meses y la otra (en general una entidad financiera) paga la tasa Libor3M cada 3 meses.

Ejemplo

Para qué serviria un swap? También para tranferir riesgo. Supongamos que una empresa pide un prestamo y tiene durante 5 años cuotas trimestrales a tasa variable (Libor por ejemplo). La empresa podria fijar una tasa con un banco de inversión y recibir a cambio Libor, con lo cual se cubre de cambios en la tasa de interes.

La vedette.. La Opción Europea



Opciones

Veamos los payoffs de las opciones europeas:

- Opcion Call, posicion *long*: $C_L(T) = (S(T) - K)^+$
- Opcion Call, posicion *short*: $C_S(T) = (K - S(T))^-$
- Opcion Put, posicion *long*: $P_L(T) = (K - S(T))^+$
- Opcion Put, posicion *short*: $P_S(T) = (S(T) - K)^-$

Desde ya, las posiciones *short* y *long* son opuestas:

$$F_L(T) + F_S(T) = C_L(T) + C_S(T) = P_L(T) + P_S(T) = 0$$

Comentario (Paridad PUT-CALL)

$$C - P = F = S - Ke^{-rT}$$

Para qué se usan?

Es claro de la definición que el comprador de opciones obtiene un riesgo limitado, ya que goza de un derecho y no una obligación. En cambio, el vendedor o emisor de la opción asume un compromiso que debe honrar si el poseedor de la opción lo requiere, y por lo tanto su riesgo es mucho mayor.

- Cobertura contra potenciales movimientos de precios
- Beneficio ante un movimiento del subyacente
- Apalancamiento y replicación de posiciones a través de productos sintéticos
- Múltiples estrategias combinando diversas opciones

Exóticas y no tanto...

- Americana (libre ejercicio)
- Bermuda (ejercicio en determinados tiempos)
- Asiática (promedios)
- Barreras
- Digitales/Binarias
- Derivados de interés fijo (Caps, Floor, Swaptions)

Y cada *Desk*[Donde trabajan los traders] tiene sus particularidades:
FX - Commodities - Equities - IR - Credit

A valuar! Modelo Binomial

Valuación de Opciones - Método Binomial

Ejemplo

Sea el activo ABC, valuada hoy en 60\$, supongamos un mundo en el que el activo en 6 meses, solo puede tomar dos precios, 66\$ o 54\$ (subir o bajar 10 %). Supongamos que se puede pedir prestado/prestar dinero a una tasa del 6 % anual (tasa libre de riesgo). Queremos ponerle precio a la opción $cABC62$. La opcion CALL, con strike de 62\$, que vence en 6 meses.

$$
\begin{tikzcd}
 & ABC_u = 66 \\
ABC = 60 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "6m"] & \\
 & ABC_d = 54
\end{tikzcd}
$$

Arbol Binomial de un paso

$$cABC62_u = \text{máx}(66 - 62, 0) = 4$$

$$cABC62 = ?? \qquad 6m$$

$$cABC62_d = \text{máx}(54 - 62, 0) = 0$$

Comentario

Se puede probar que la ausencia de arbitraje equivale a:

$$S_d < S(1 + r) < S_u$$

En este ejemplo:

$$S_d = 54 < 60(1 + 0{,}03) = 61{,}8 < S_u - 66$$

Estrategia de replicación

Contamos con los siguientes productos a dispocicón:

- activo S
- opción C
- dinero (un bono libre de riesgo) B. **Money market**

La idea es replicar con S y C a B.
Es decir, armarse un portfolio libre de riesgo. Sea:

$$\Pi = \begin{cases} 1 & \text{unidad de } C \textit{ short} \\ \Delta & \text{unidades de } S \textit{ long} \end{cases}$$

con Δ a determinar:

$$\Pi = \Delta S - C$$

Comentario

Para que el porfolio sea libre de riesgo, necesaitamos:

$$\Pi_d = \Pi_u$$

Cuentas

1. Hallar Δ tal que $\Pi_u = \Pi_d$ (libre de riesgo).

$$\Delta = \frac{4-0}{66-54} = \frac{1}{3}$$

2. Ahora $\Pi = \frac{1}{3}S - C \Rightarrow \Pi(6m) = 18$. Pero es libre de riesgo:

$$\Pi(0) = \frac{1}{(1+\frac{0,006}{2})}\Pi(6m) = \frac{1}{(1+\frac{0,006}{2})}18$$

   Con lo cual, $\Pi(0) = 17,47$

3. Despejo el valor del call $C(0) = 2,52$

Algunas Conclusiones

Diferencias entre invertir en S y en C: Supongamos que disponemos de 6000\$ para invertir.
Podía haber comprado:

- 100 acciones de ABC.
- 2350 opciones de $cABC62$

Analicemos los dos posibles escenarios:

1. Si la acción subía a 66\$:
   - $ABS = 66\$ \Rightarrow$ 600\$ de ganancia (10 %)
   - $cABC62 = 4\$ \Rightarrow$ 3468\$ de ganancia (57 %)
2. Si la acción bajaba a 54\$:
   - $ABS = 66\$ \Rightarrow$ 600\$ de pérdida (10 %)
   - $cABC62 = 0\$ \Rightarrow$ 6000\$ de pérdida (100 %)

Obs: Para obtener los 600\$ que generaban 6000\$ con la acción (100 acciones), habría necesitado 1027\$ (407 opciones).

Caso General

Tenemos:

- S el precio de un activo
- C el precio de una opción call europea sobre este
- K el strike
- T el tiempo de expiración
- r la tasa de interes libre de riesgo
- S puede subir a S_u o bajar a S_d en T
- C_u y C_d representan los valores del call respectivamente

$$
\begin{tikzcd}
 & (S_u, C_u) \\
(S, C) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (S_d, C_d)
\end{tikzcd}
$$

Armamos el portfolio

Armemos el portfolio Π con una opción short y Δ unidades del activo long:

$$\Pi = \begin{cases} \Delta \text{ acciones long} \\ 1 \text{ opción short} \end{cases}$$

Como se vio en el ejemplo, $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$. El valor esperado:

$$\Pi_d(T) = \Pi_u(T) = \mathbb{E}(\Pi(T)) = \Pi(1+r) \Rightarrow \Pi(0) = \frac{1}{(1+r)}\Pi_u$$

entonces:

$$\Delta S - C = \frac{1}{(1+r)}(\Delta S_u - C_u)$$

Despejando...

Despejando C, nos queda:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left((1+r)\Delta S - \Delta S_u + C_u\right)$$

Con lo cual $E(C(T)) = (1+r)\Delta S - \Delta S_u + C_u$. Remplazando Δ:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left((1+r)\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}S - \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}S_u + C_u\right)$$

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left(C_u\frac{S(1+r) - S_d}{S_u - S_d} + C_d\frac{S_u - S(1+r)}{S_u - S_d}\right)$$

Promedio descontado

Se puede escribir entonces al valor del Call como:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left(C_u q + C_d(1-q)\right) \text{ con } q = \frac{S(1+r)-S_d}{S_u - S_d}$$

Una combinación convexa de C_u y C_d multiplicada por el factor de descuento. Resulta que q es una probabilidad, no la probabilidad de que el activo suba, sino la de *riesgo neutral*, a partir de la hipótesis de no arbitraje y la completitud del mercado.

El valor inicial de la opción puede escribirse como:

$$C(0) = \frac{1}{(1+r)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C(T)]$$

Árbol Binomial General

La idea ahora es que el precio de la acción pueda subir o bajar no sólo una vez, sino un número finito m de veces en el intervalo $[0, T]$ cada δt con $T = m\delta t$. Este modelo es:

- **Simple** como para trabajar explícitamente
- **Ayuda** para comprender la valuación de derivados y aproximar problemas más realistas.

1. Se construye un árbol con los posibles valores del activo, dado un valor inicial de este.
2. Se analizar los posibles precios a tiempo T y determinar la probabilidad de riesgo neutral.
3. Yendo para atrás por el árbol y, a partir de la relación anterior, se calculan los valores en cada nodo.

Notación

Se toma en este modelo $S_u = \mathfrak{u}S$ y $S_d = \mathfrak{d}S$ con $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ fijos. Notación:

$$S_n^j = S_{\underbrace{uu...u}_{j}\underbrace{dd...d}_{n-j}} = S\mathfrak{u}^j\mathfrak{d}^{n-j} \qquad 0 \leq n \leq m \qquad 0 \leq j \leq n$$

Tomaremos como factor de descuento e^{-rt}, es decir un interes continuo.

El árbol resulta entonces:

El Árbol

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \cdots \\
 & & \mathfrak{u}^2 S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \mathfrak{u} S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathfrak{u}\mathfrak{d} S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \mathfrak{d} S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & & \mathfrak{d}^2 S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & \cdots
\end{tikzcd}
$$

La probabilidad de riesgo neutral

Haciendo un análisis similar al anterior, resulta que:

$$q = \frac{e^{r\delta t} - \mathfrak{d}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{d}}$$

Notar que q no depende de S, es decir, no depende del precio del activo sino que es intrínseco al activo, lo que es más cercano a la realidad.

Comentario

La condición de no arbitraje para este modelo resulta:

$$0 < \mathfrak{d} < 1 + r < \mathfrak{u}$$

Qué es esto de Risk Neutral?

Este concepto de *pseudo-probabilidad* de que el activo suba es uno de los conceptos básicos en toería de valiación:

- NO solo con opciones! Cualquier derivado
- Es INDEPENDIENTE al modelo usado.

Comentario

El mundo *Riesgo-Neutral* es un mundo en el cual los inversores no tienen ni Aversión al Riesgo, ni tampoco lo buscan.

Teorema

El precio de cualquier derivado se puede obtener descontando la esperanza del payoff, bajo la probabilidad de riesgo neutral (Lo veremos mejor el miérc oles).

$$V(0) = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[V(T)\right]$$

Fórmula recursiva a partir del Árbol

Como vimos en el ejemplo, surge la siguiente fórmula recursiva:

$$\begin{cases} C_n^j = e^{-r\delta t}\left(qC_{n+1}^{j+1} + (1-q)C_{n+1}^j\right), \quad 0 \le n \le m-1, \quad 0 \le j \le n \\ C_m^j = (S_m^j - K)^+, \quad 0 \le j \le m \end{cases}$$

Conociendo el Payoff, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, hasta llegar al $C_0^0 = C$.

Comentario

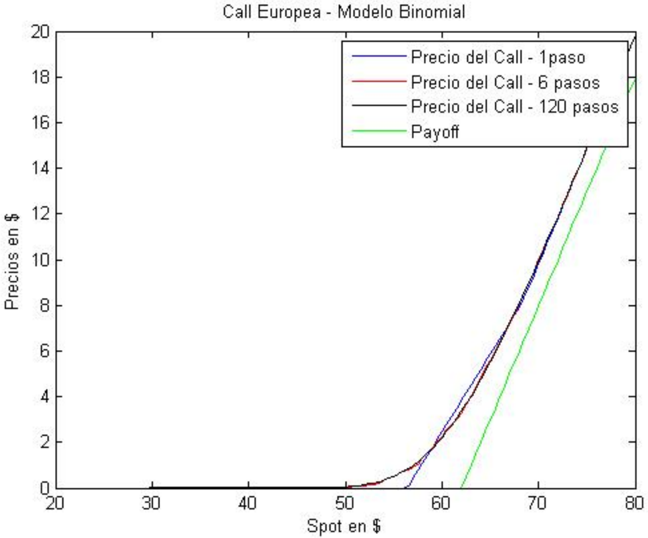
Este método es muy valioso también cuando hay posibilidad de ejercicio previo a T (opciones americanas, por ejemplo) ya que en cada instante se tendrá el precio del derivado y con todos los datos se podrá elegir el momento conveniente de ejercer.

También es útil en el caso de opciones barrera.

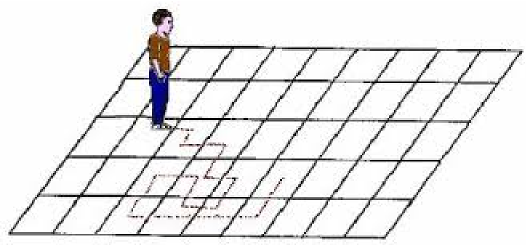
Vamos a la máquina ![LINK!]

Modelo Binomial - Matlab

Si todo salió bien, pudieron ver la cocina...
Si no, aquí el plato terminado:



El paseo al azar...



El paso al límite

Qué resulta de un árbol binomial en el límite?..

Paseo al azar - random walk

En física/matemática:

- Movimiento aleatorio de moléculas de líquidos y gases
- Teoría Cuántica de campos
- Dinámica de poblaciones
- Procesamiento de imágenes

Además de ser unas *simplificación* del:

Movimiento Browniano - proceso de Wiener

Preguntas, Comentarios,...

CRISIL

A STANDARD & POOR'S COMPANY

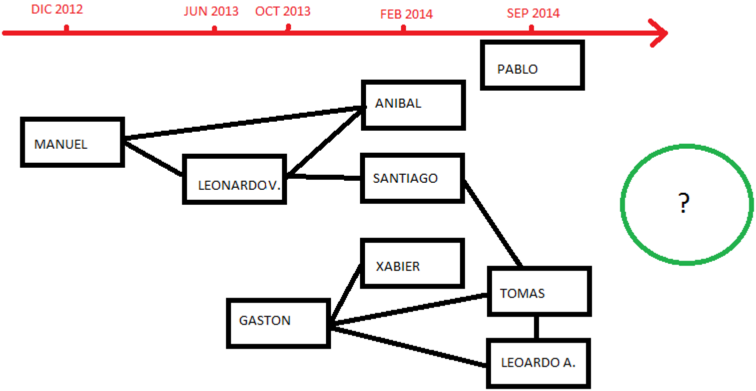
Nuestro equipo de Analistas Cuantitativos

A la fecha (Oct 2014) tenemos un equipo de 12 Analistas Cuantitativos:

2a4m	Simone Mercuri - Dr. en Física (ITALIA)
1a10m	Manuel Maurette - Dr. en Matemática (UBA)
1a8m	Alejandro Gomez - Dr. en Matemática (USA)
1a4m	Leonadro Vicchi - Dr. en Matemática (UBA)
1a	Gastón Romeo - Dr. en Física (UBA)
8m	Anibal Amoreo - Dr. en Matemática (UBA)
8m	Xabier Anduaga - Dr. en Física (UNLP)
8m	Santiago Martinez - Dr. en Física (BALSEIRO)
5m	Gonzalo Sosa Rolón - Ing. Informática (UBA)
1m	Tomás Teitelbaum. Dr. en Física (UBA)
1m	Leonardo Amarilla - Dr. en Física (UBA)
1m	Pablo Macri - Dr. en Física (BALSEIRO)

Grizzly - Cont

Como se formo el equipo local?



Más quants en CRISIL

Hoy además de nuestro equipo hay un segundo equipo de Quants, haciendo Model Validation para otro cliente, conformado por:

- Nicolás Benielli - Ing. Nuclear (BALSEIRO) + Master en Finanzas Cuantitativas en San Andres.
- Andrés Mogni - Lic. en Matemática (UBA) + Master en Finanzas Cuantitativas en San Andres.
- Victor Daniel Casas - Ing. Finanzas (COLOMBIA)

Qué se necesita para ser un quant perfecto?

- Carrera Solicitada: PhDs en Matemática o Física
- Requerimiento de Idioma: Inglés, oral y escrito - Nivel: Excelente (Bilingüe)
- Conocimientos de Programación (C++, python, VBA, o similares)
- Manejo de las siguientes áreas:
  - Cáclulo Estocástico
  - Teoría de la probabilidad
  - Ecuaciones Diferenciales Parciales
  - Métodos Numéricos (Monte Carlo, Diferencias Finitas, Integración, Interpolación)
  - Cálculo y Álgebra Leneal
  - Optimización
  - Estadística

Qué se necesita para ser un aspirante a quant?

- Carrera Solicitada: Lic en Matemática o Física o Computación + **Maestria en Finanzas**
- Requerimiento de Idioma: Inglés, oral y escrito - Nivel: **Buenos y seguir estudiando**
- Conocimientos de Programación: **Alguna introducción a algoritmos y manejo de al menos un lenguaje**
- **Ser muy fuerte en al menos una de las siguientes**
  - Cáclulo Estocástico
  - Ecuaciones Diferenciales Parciales
  - Métodos Numéricos (Monte Carlo, Diferencias Finitas, Integración, Interpolación)
  - Optimización
  - Estadística

.. y estar dispuesto a aprender las otras.

Algunas Referencias

- Avellaneda M. (2000) Quantitative modeling of derivative securities, Chapman & Hall/CRC.
- Bachelier, L. (1900), "Théorie de la spéculation", Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 3 (17): 21–86
- Baxter, M. & Rennie, A. (1996) Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing, Cambridge University Press.
- Black F. & Scholes M. (1973) The pricingof options and corporate liabilities, J. Political Econ. 81, pp. 637-659
- Hull J. C. (1997) Options, Futures, and other Derivatives, Prentice - Hall, Inc.
- Wilmott P. Dewynne J. & Howison S. (1993) Option Pricing, Oxford Financial Press, Oxford.
- Vázquez, C.(2010) An Introduction to Black-Scholes Modeling and Numerical Methods in Derivatives Pricing, MAT-A 17, Universidad Austral, Rosario.
- Presentaciones de Leonardo Vicchi y Maciej Trzetrzelewski